القسم : تحليل رياضيات السنة : الرابعة ج المادة : منطق رياضي المحاضرة : العاشرة

- تبسيط الدوال البوليانية.

مثال:
باستخدام مخططات كارنو أوجد الصيغة الأصغرية للدالة البوليانية.

$2^4 = 16$

	AB	AB'	A'B'	A'B
CD		2 (1	(1)	
CD'			(1) 4	
C'D'			(1	1) 3
C'D	(1) 11			

$$Msp(f_1) = ABC'D + B'CD + A'C'D' + A'B'C$$

$$Msp(f_2) = ABC'D + B'CD + A'C'D' + A'B'D'$$

مثال:
باستخدام مخطط كارنو أوجد الصيغة الأصغرية لكثيرة الحدود البوليانية التالية
وهل هناك صيغة وحيدة أم أكثر من صيغة أصغرية.

$$f = x'y'zw + z'w + zw' + yw' + xw'$$

الحل:
نكتب f بالشكل القانوني (مجموع جداءات قانونية) أو الصورة الكاملة.

$2^4 = 16$

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy		1	1	1
xy'		1	1	1
x'y'	1	1		1
x'y		1	1	1

$$Msp(f_1) = x'y'w + zw' + xz' + yz'$$

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy		1	1	1
xy'		1	1	1
$x'y'$	1	1		1
$x'y$		1	1	1

$$Msp(f_2) = x'y'z + yw' + xw' + z'w$$

تمرين :

باستخدام مخططات كارنو اوجد الصيغة الأصغرية لكثيري الحدود التاليين .

$$f_1 = xyz + xz' + xyw' + x'z + x'y'z'w'$$

$$f_2 = x'y' + xy'zw + xy'z' + yzw'$$

اوجد كثير الحدود الأصغري البولياني الممثل بمخططات كارنو التالي .

	AB	AB'	$A'B'$	$A'B$
CD		1	1	
CD'				
$C'D'$				
$C'D$	1	1	1	1

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy		1	1	
xy'	1			1
$x'y'$	1			1
$x'y$	1			1

جبر المنطق :

تعريف العبارة المنطقية (القضية) :
هي جملة خبرية (تقريرية) تحمل معنى محدداً إما صحيحة أو خاطئة .

مثال :
بين فيما إذا كانت العبارات الآتية عبارة منطقية أم لا .
١- الأرض كروية		عبارة منطقية .
٢- الشمس ستشرق غداً		ليست عبارة منطقية .
٣- الأصبح كم ساعة الحضور مسرحية		ليست عبارة منطقية .
٤- 1 > 2 عبارة منطقية .
٥- 2 عدد أولي		عبارة منطقية
٦- يا ولد ذكي		ليست عبارة منطقية .
٧- العدد x عدد صحيح موجب	x+5 أكبر من الصفر
ليست عبارة منطقية .

أدوات الربط المنطقية :
١- النفي : ¬ , ~
$\neg p$ ، $\sim p$ ، p'

٢- أداة الربط (∧) الوصل و .
إذا كان لدينا قضيتين p , q
$p \wedge q$

٣- أداة الربط (∨) (أو الفصل) .
$p \vee q$

- التوابع المنطقية أو الأشكال العباراتية :
إن العبارة $p \wedge q$ تمثل عبارة منطقية ذات معان عديدة و p , q تسمى متغيرات منطقية كما أن $p \wedge q$ تسمى شكلاً عباراتياً أو تابعاً منطقياً : لنعرف التابع المنطقي (الشكل العباراتي) .
عبارة مكونة من متغيرات منطقية وأدوات الربط بينها .

مثلاً :

$P(q', r)$ ، p و (q') كلها اشكال عباراتية أو توابع منطقية.
إذا كان P تابع منطقي تابع للمتغيرات p، q، r وشكلاً عباراتياً فإن P يأخذ القيمة الحقيقة صح أو خطأ بعد أن يأخذ كل متغير قيمة حقيقة صح أو خطأ.

مثال :

لتكن لدينا المتغيرات المنطقية r، q، p ولتكن الأشكال العباراتية الآتية :

١- $q.r$ ٢- $q+r$

٣- $p(q+r)$ (٤)- $p+q.r$

٥- $pr+qr$

ونفرض أن p، q عبارتان صحيحتان وأن r خاطئة عندها حدد قيم الحقيقة للأشكال العباراتية المعطاة.

+ = ٧
٨ = ٠

الحل :

١- خطأ.
٢- صح
٣- صح
٤- صح
٥- خطأ

- جداول الحقيقة للأشكال العباراتية.

$p.q$ ، $p+q$

p	q	$p+q$	$p.q$
١	١	١	١
١	٠	١	٠
٠	١	١	٠
٠	٠	٠	٠

مثال :

اكتب جدول الحقيقة لكل من الأشكال العبارية الآتية :

$p'+q$ ، $pq+q'r$ ، $p'q'r+pqr'$

$p'+q$

p	q	$p'+q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$pq+q'r$

$2^3=8$

p	q	r	pq	$q'r$	$pq+q'r$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

$p'q'r+pqr'$

$2^3=8$

p	q	r	pq	$q'r$	$p'q'r$	$pq'r'$	$p'q'r + pq'r'$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0

جبر بول للعبارات المنطقية:

تعريف ليكن

$U = U(p_1, \ldots, p_n)$, $V = V(q_1, \ldots, q_n)$

ان العبارتين U و V انهما تكافئان منطقياً أو متساويتان إذا، كانت قيم الحقيقة لها متطابقة في جدول الحقيقة.

مثال:

برهن أن:

1) $pq' = (p'+q)'$

بين انه هل؟

2) $p(q+r) \overset{?}{=} p+qr$

أثبت أن

3) $p(q+r) = pq+pr$

(1)

p	q	pq'	$p'+q$	$(p'+q)'$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

نلاحظ أن لها نفس قيم الحقيقة في جدول الحقيقة وبذلك فهما متساويتان.

2).

p	q	r	$q+r$	$p(q+r)$	qr	$p+qr$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

غير متساويين ومختلفان.

$$p(q+r) \neq p + qr$$

وثالث بنفس الطريقة.

تعريف (هام).

لتكن p و q عبارتين منطقيتين ما ولنعرف أداة الربط $\oplus$ بين العبارتين p, q بالعبارة التالية:

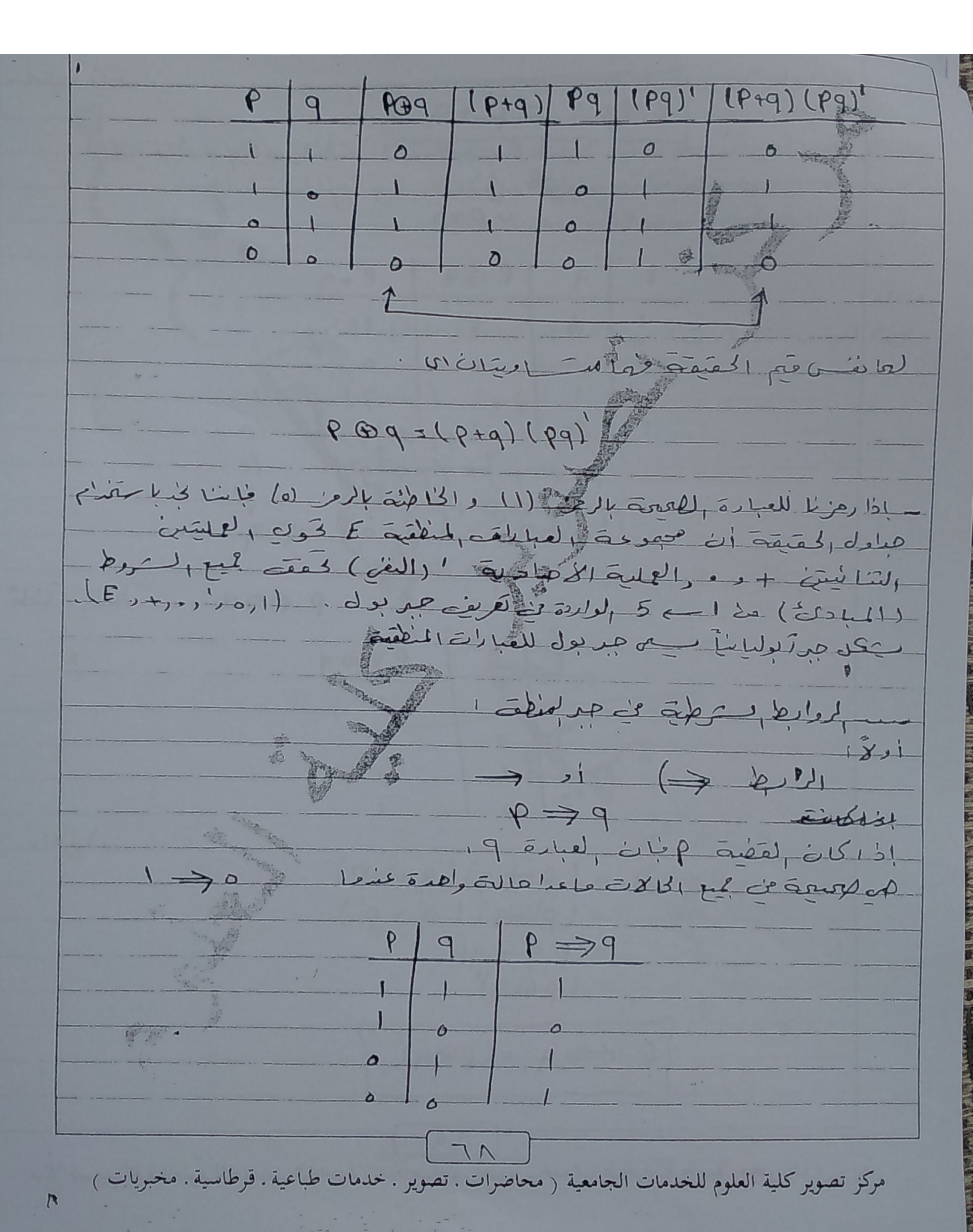
$$p \oplus q = pq' + p'q$$

إن $p \oplus q$ تعني أن p أو q وليس كليهما ولذلك تدعى (أو المقتصرة)

تمرين (مهم):

أثبت أن بواسطة الجدول.

$$p \oplus q = (p+q)(p.q)'$$



p	q	$p\oplus q$	$(p+q)$	pq	$(pq)'$	$(p+q)(pq)'$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

لها نفس قيم الحقيقة فهما متساويتان اي:

$$p \oplus q = (p+q)(pq)'$$

- إذا رمزنا للعبارة الصحيحة بالرمز (1) والخاطئة بالرمز (0) فإننا نجد باستخدام جداول الحقيقة أن مجموعة العبارات المنطقية E تحوي العمليتين الثنائيتين + و . والعملية الأحادية ' (النفي) تحقق جميع الشروط (المبادئ) من 1 ـ 5 الواردة في تعريف جبر بول. $(E, +, ., ', 0, 1)$ يشكل جبراً بولياناً يسمى جبر بول للعبارات المنطقية

- الروابط الشرطية في جبر المنطق:

أولاً:

الرابط ($\Rightarrow$) أو $\rightarrow$

~~الشكل~~ $p \Rightarrow q$

إذا كان القضية p فإن العبارة q،

هي صحيحة في جميع الحالات ما عدا حالة واحدة عندما $1 \Rightarrow 0$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- أثبت أن

$$p \Rightarrow q = p' + q$$

(الانتقال من جبر المنطق إلى جبر بول) أي

$$= \sim p + q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p' + q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1

$$(p \Rightarrow q)' = (p' + q)' = p . q'$$

ثانياً : الربط $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

واضح أن

$$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p)$$
$$= (p' + q)(q' + p)$$
$$= p'q' + qp$$
$$= (p \oplus q)'$$

$$p \Leftrightarrow q = (p \oplus q)'$$

سس التوتولوجي والتناقض :

الشكل العباراتي يسمى توتولوجي أو استدلال إذا كانت جميع قيم الحقيقة واحدة، ويسمى الشكل العباراتي تناقضاً إذا كانت جميع قيم الحقيقة أصفار، ويسمى تناقضاً أو استدلال فيما عدا ذلك .

مثال :
بين أي من العبارات استدلال أو تناقض أو غير ذلك :

1) $(p+q') \Rightarrow pq$
2) $(p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p')$
3) $(p \Rightarrow q) + (q \Rightarrow p)$
4) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p+q')$

باستخدام خواص جبر بول وباستخدام جدول الحقيقة.

انتهت المحاضرة